FLE, Exo

Ecoulement hyperbolique

Champ de vitesse et autres caractéristiques de l'eclt

FLEExoEcltHyperboliqueGRW

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

Champ de vitesse et autres caractéristiques de l'eclt

Supposons que l'on connaisse le champ de vitesse ou que l'on ait une information sur le champ de vitesse

champ de vitesse
- observation
- intuition

Définition

caractéristiques cinématiques
- trajectoires
- lignes de courant
- vecteur position, acc.

Masse

• masse volumique

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, \mathrm{div}\, V = 0$$

• masse volumique ρ
• incompressibilité.

PFD
Qté mvt

• Efforts

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \Delta V_i$$

• $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P$
• importance effets visqueux

La connaissance du champ de vitesse (ou d'une partie du champ de vitesse) impose, par l'intermédiaire des lois de conservation, des propriétés sur les autres grandeurs de l'éclt (pression, masse volumique, effets visqueux, …)

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

Eclt hyperbolique

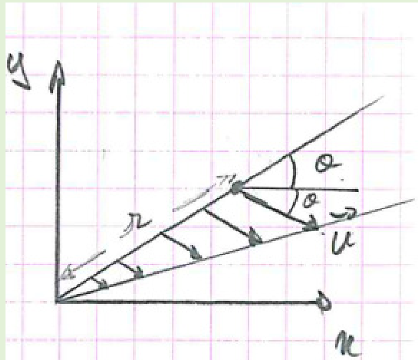
On se donne un champ de vitesse

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \left| \begin{array}{l} u_x(\vec{x},t) = \alpha x = \alpha r\cos\theta \\ u_y(\vec{x},t) = -\alpha y = -\alpha r\sin\theta \\ u_z(\vec{x},t) = 0 \end{array} \right.$$

Analyse de l'énoncé

Champ de vitesse eulérien

Eclt plan, stationnaire



Ligne de courant, trajectoire

Accélération

Que dire de la masse volumique ?

Que dire des effets visqueux ?

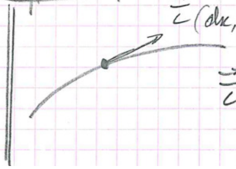
Comment évolue la pression dans l'espace?

Lignes de courant, trajectoires

ligne de courant (notion Eulérienne)

Rappel Def : ligne où à l'instant t tangente à la vitesse

$\vec{\tau}(dx, dy, dz)$

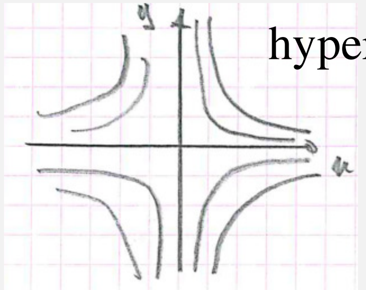


$$\vec{\tau} \parallel \vec{V} \Rightarrow \vec{\tau} = \lambda \vec{V} \Rightarrow \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \lambda$$

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \left| \begin{array}{l} u_x(\vec{x},t) = \alpha x \\ u_y(\vec{x},t) = -\alpha y \\ u_z(\vec{x},t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{-\alpha y} = \frac{dz}{0} = \lambda$$

$$\left| \begin{array}{l} dz = 0 \quad z = \text{cst} \quad (\text{mvt plan}). \\ \dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = -\ln y + A \Rightarrow xy = \text{cste} \end{array} \right.$$



hyperboles

Lignes de courant = trajectoire

Stationnaire

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x},t)$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = u_x(x,y,z,t) \\ \dot{y} = u_y(\ \text{———}\ ) \\ \dot{z} = u_z(\ \text{———}\ ) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = -\alpha y \\ \dot{z} = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \ln x - \ln x_0 = \alpha(t - t_0) \\ \ln y - \ln y_0 = -\alpha(t - t_0) \\ z = z_0 \end{array}$$

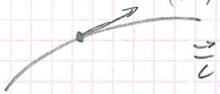
$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 \exp \alpha(t - t_0) \\ y = y_0 \exp -\alpha(t - t_0) \\ z = z_0 \end{array} \right.$$

Lignes de courant, trajectoires

ligne de courant (notion Eulérienne)

Rappel Déf : ligne à l'instant t tangente à la vitesse

$\vec{\tau}(dx, dy, dz)$



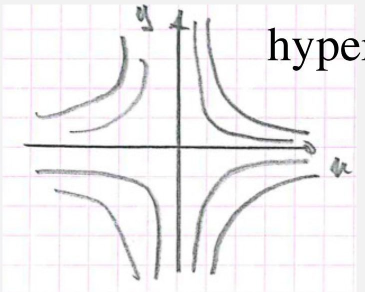
$$\vec{\tau} \parallel \vec{V} \Rightarrow \vec{\tau} = \lambda \vec{V} \Rightarrow \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \lambda$$

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \begin{cases} u_x(\vec{x},t) = \alpha x \\ u_y(\vec{x},t) = -\alpha y \\ u_z(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{-\alpha y} = \frac{dz}{0} = \lambda$$

$dz = 0$ $\quad z = cst$ (mvt plan).

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = -\ln y + A \Rightarrow xy = cste$$



hyperboles

Lignes de courant = trajectoire

Stationnaire

Notion lagrangienne

Rappel Déf : La trajectoire d'une particule $\vec{a}$ est l'ensemble des positions qu'elle prend au cours du temps

$\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$ $\quad$ t varie

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x},t) \qquad \begin{cases} \dot{x} = u_x(x,y,z,t) \\ \dot{y} = u_y(\text{——}) \\ \dot{z} = u_z(\text{——}) \end{cases}$$

Système d'équations différentielle du 1er ordre en temps couplées

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = -\alpha y \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \ln x - \ln x_0 &= \alpha(t - t_0) \\ \ln y - \ln y_0 &= -\alpha(t - t_0) \\ z &= z_0 \end{aligned} \qquad \begin{cases} x = x_0 \exp \alpha(t - t_0) \\ y = y_0 \exp -\alpha(t - t_0) \\ z = z_0 \end{cases}$$

xy=Cte

ÉCOLE CENTRALE LYON

Gilles Robert

Accélération

$$\begin{cases} x = x_0 \exp \alpha(t-t_0) \\ y = y_0 \exp -\alpha(t-t_0) \\ z = z_0 \end{cases}$$

On a le vecteur position

Dans Lagrange
On dérive 2 fois le vecteur position

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = x_0 \alpha^2 \exp \alpha(t-t_0) = \alpha^2 x \\ \ddot{y} = y_0 \alpha^2 \exp \text{---} = \alpha^2 y \\ \ddot{z} = 0 = 0 \end{cases}$$

Dans Euler
On utilise la dérivée particulaire du vecteur vitesse

$$\begin{cases} u_x(\vec{x},t) = \alpha x \\ u_y(\vec{x},t) = -\alpha y \\ u_z(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{DV_x}{Dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

$$\begin{array}{l} 0 + \alpha x \alpha \cancel{- \alpha y 0} + 0 \\ 0 \cancel{+ 0 \alpha x 0} + \alpha y \alpha + 0 \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} \gamma_x = \alpha^2 x \\ \gamma_y = \alpha^2 y \\ \gamma_z = 0 \end{cases}$$

cqfd

$$\begin{cases} u_x(\vec{x},t) = \alpha x \\ u_y(\vec{x},t) = -\alpha y \\ u_z(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

Conséquence sur ρ

Info sur V → Eq. masse $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho \, \mathrm{div}\, \vec{V} = 0$ → Info sur ρ

$$\mathrm{div}\, \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \alpha - \alpha + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\rho(\vec{a},t) = \rho(\vec{a}) = \rho_0$$

si homogène.

L'écoulement est incompressible, les effets de compressibilité n'interviennent pas

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

$$\left| \begin{array}{l} u_x(\vec{x},t) = \alpha x \\ u_y(\vec{x},t) = -\alpha y \\ u_z(\vec{x},t) = 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \gamma_x = \alpha^2 x \\ \gamma_y = \alpha^2 y \\ \gamma_z = 0 \end{array} \right.$$

Conséquence sur les efforts

Info sur V → Qté Mvt $\rho \frac{du_i}{dt} = \rho\left(\cancel{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \underbrace{\mu \Delta V_i} + \rho f_i$ → Info sur Pression, Effets visqueux

$$\begin{array}{ll} (x) & \rho \alpha^2 x = -\frac{\partial P}{\partial x} + 0 + \cancel{\rho f_x} \\ (y) & +\rho \alpha^2 y = -\frac{\partial P}{\partial y} + 0 + \cancel{\rho f_y} \\ (z) & 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + 0 + \cancel{\rho f_z} \end{array}$$

Pas d'effets visqueux

H Pas de force à distance

$$\boxed{P = P_0 - \frac{1}{2}\rho\alpha^2 (x^2 + y^2)}$$

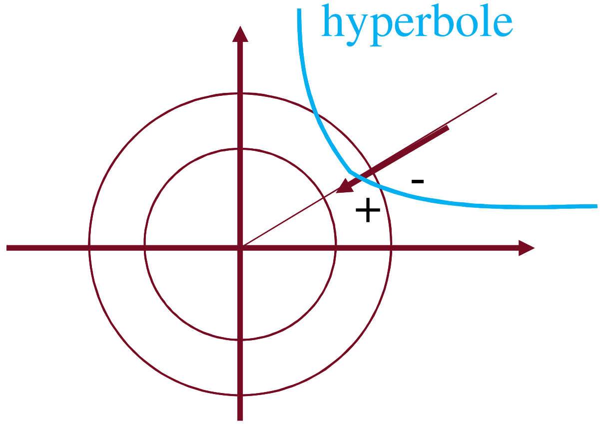
Le champ donné, correspond à un éclt
- Stationnaire
- Incompressible
- Sans effets visqueux (Fparfait)

$$\boxed{\Delta V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}}$$

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\,\alpha^2 (x^2 + y^2)$$

Champ de pression



Isobares p=cte

$x^2 + y^2 = \text{cte} \longrightarrow$ Cercle de centre O

Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, p \left|\begin{array}{l} \partial p/\partial x = -\rho\alpha^2 x \\ \partial p/\partial y = -\rho\alpha^2 y \\ 0 \end{array}\right. \quad -\rho\,\alpha^2\, r\,\vec{e}_r$$

Le gradient indique les grandes valeurs

Gradient et trajectoires

Le gradient de pression courbe les trajectoires

En étudiant la courbure des trajectoires on peut identifier les zone de surpression et de dépression

Gilles.robert@ec-lyon.fr

36 av. Guy de Collongue
69134 Écully cedex
T + 33 (0)4 72 18 60 00
www.ec-lyon.fr