FLE, Exo

Ecoulement Circulaire

Description Euler-Lagrange
Lignes de courant
Trajectoires

Gilles Robert

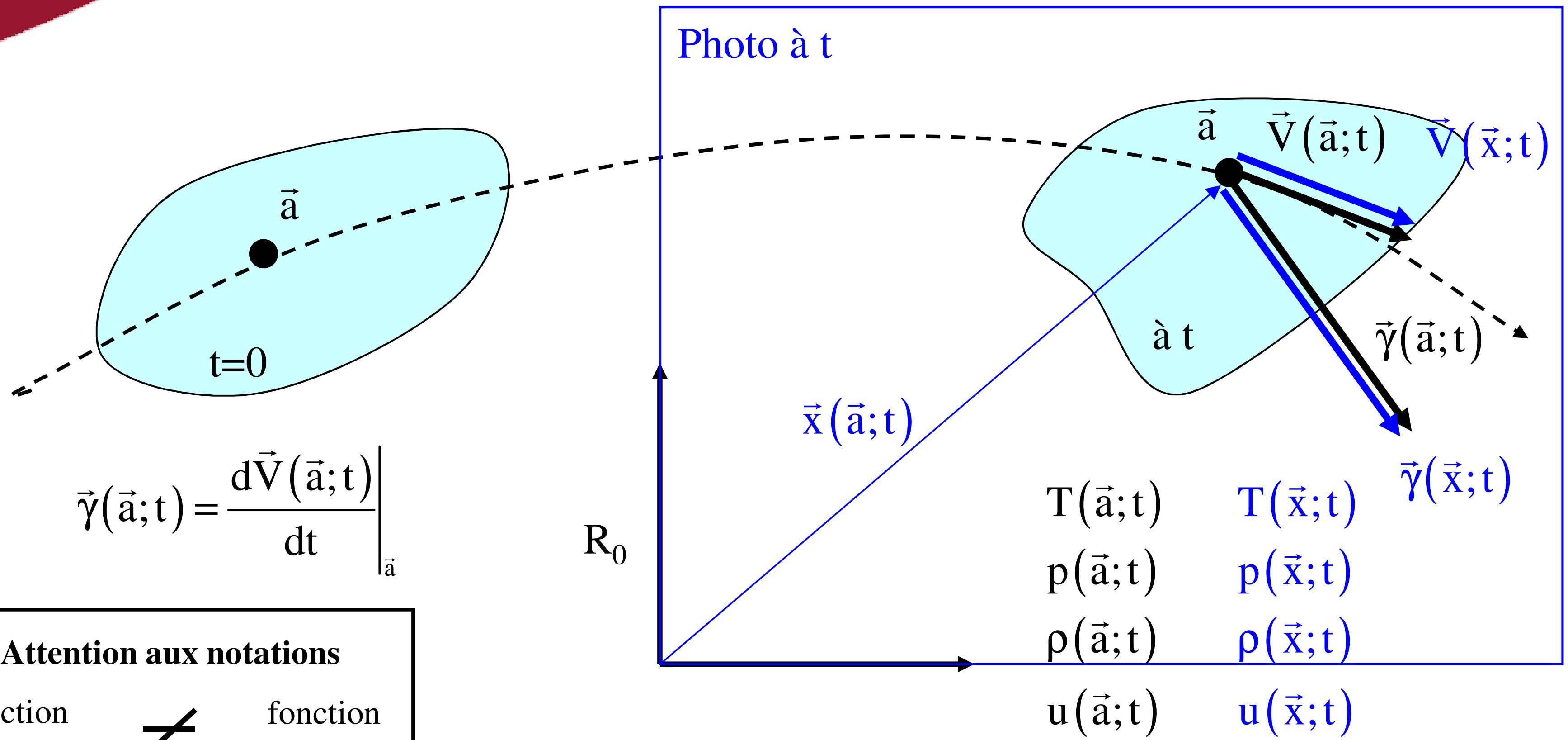
FLEExoEcltCirculaireGR

ÉCOLE CENTRALE LYON

Gilles Robert

Le mouvement de la particule: deux descriptions

Description Lagrangienne, description Eulérienne



$$\vec{\gamma}(\vec{a};t) = \left.\frac{d\vec{V}(\vec{a};t)}{dt}\right|_{\vec{a}}$$

Attention aux notations

fonction $T(\vec{a};t)$ $\neq$ fonction $T(\vec{x};t)$

$T(\vec{a};t) \longrightarrow \tilde{T}(\vec{a};t)$

$$\tilde{T}(\vec{a};t) = T(\vec{x};t) = T(\vec{x}(\vec{a};t);t)$$

Il y a deux façons équivalentes de voir le mouvement

La description Lagrangienne qui suit la particule dans son mouvement

La description Eulérienne qui regarde passer les particules

La mécanique des fluides utilise la description Eulérienne

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

Ecoulement Circulaire : Enoncé

Exo 1. Ecoul^t circulaire

On se donne un champ de vitesse

$$\vec{U}(\vec{x},t) = \left| \begin{array}{l} U_x(\vec{x},t) = a \sin \omega t \\ U_y(\vec{x},t) = a \cos \omega t \\ U_z(\vec{x},t) = 0 \end{array} \right.$$

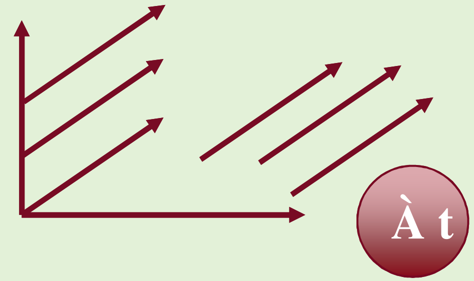
Calculer les lignes de courant à l'instant t

Calculer les trajectoires

Analyse de l'énoncé

Champ de vitesse eulérien

Champ de vitesse uniforme



Ecoulement plan

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

Lignes de courant

Euler

Démarche

Def

U(x;t) Eulerien

système Éq. Diff. (couplées)

Ligne de courant

Rappel Déf : ligne à l'instant t tangente à la vitesse (photo instantanée du champ de vitesse)

$\vec{\tau}\,(dx, dy, dz)$

$\vec{\tau} \,/\!/\, \vec{u} \Rightarrow \vec{\tau} = \lambda \vec{u} \Rightarrow \dfrac{dx}{u_x} = \dfrac{dy}{u_y} = \dfrac{dz}{u_z} = \lambda$

Rq : on peut aussi écrire $\vec{u} \wedge \vec{\tau} = \vec{0}$

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \left\| \begin{array}{l} u_x(\vec{x},t) = a \sin \omega t \\ u_y(\vec{x},t) = a \cos \omega t \\ u_z(\vec{x},t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{dx}{a \sin \omega t} = \frac{dy}{a \cos \omega t} = \frac{dz}{0} = \lambda \Rightarrow dz = 0$$

$$\Downarrow$$

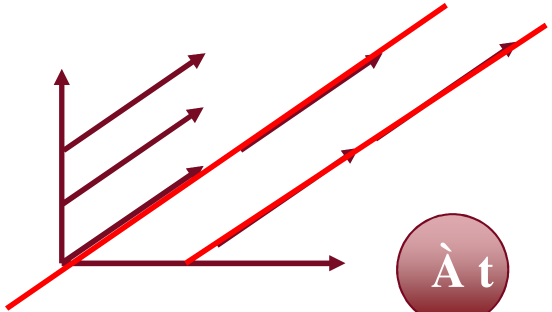
$$dx\, \cancel{a} \cos \omega t = dy\, \cancel{a} \sin \omega t$$

! t est fixe ! $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} z = cte = \beta \\ x \cos \omega t - y \sin \omega t = \alpha \end{array}}$$

Droites parallèles

Champ de vitesse uniforme



À t

On reste dans Euler

Trajectoires

Rappel Def : La trajectoire d'une particule $\vec{a}$ est l'ensemble des positions qu'elle prend au cours du temps

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t) \quad t \text{ varie.}$$

Notion lagrangienne

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{U}(x;t) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \dot{x} = U_x(x,y,z;t) := a \sin \omega t \\ \dot{y} = U_y(x,y,z;t) = a \cos \omega t \\ \dot{z} = U_z(x,y,z;t) = 0 \end{array}\right.$$

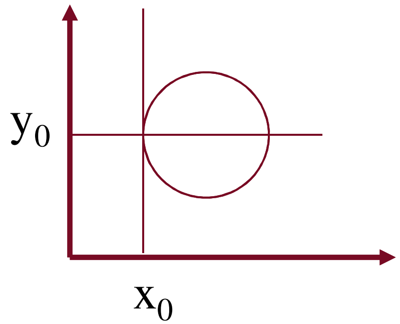
Info Eulérienne

$$\left|\begin{array}{l} x = \alpha - (a/\omega) \cos \omega t \\ y = \beta + (a/\omega) \sin \omega t \\ z = \gamma \end{array}\right.$$

$x_0 + \frac{a}{\omega}$

y_0

z_0



Cercle de rayon a/ω

Démarche

Def

Correspondance Euler/Lagrange

système Éq. Diff. en t (couplées)

Position initiale

Trajectoire

On est passé d'une info dans Euler pour obtenir une info dans Lagrange

Rque : Si on connaît le champ de vitesse dans la description lagrangienne $\tilde{\vec{U}}(\vec{a},t)$, l'intégration est immédiate car le système n'est pas couplé.

$$\dot{x} = \tilde{U}_x(t)$$
$$\dot{y} = \tilde{U}_y(t)$$
$$\dot{z} = \tilde{U}_z(t)$$

Gilles.robert@ec-lyon.fr

36 av. Guy de Collongue
69134 Écully cedex
T + 33 (0)4 72 18 60 00
www.ec-lyon.fr